フーリエ級数（三角関数）

○周期T_0の周期関数$f(t)$は、三角関数の無限和で表すことができ、これをフーリエ級数展開という

○フーリエ級数展開式の各係数（a_0, a_k, b_k）をフーリエ計数と呼ぶ

○足し合わされる三角関数は、元の関数$f(\mathrm{t})$の周期と、その整数分の 1 の周期（1/2 の周期、1/3 の周期、1/4 の周期…）を持つものであり、それ以外の周波数成分を持たない

下記フーリエ級数の展開式において

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T_0}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T_0}t\right)$$

フーリエ計数(a_0、a_k、b_k、$k = 1,2,3 \ldots.$)を求める

まず両辺に$\frac{-\mathrm{T}_0}{2}$から$\frac{\mathrm{T}_0}{2}$まで積分する式変形を加えることでa_0が求まる

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T_0}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T_0}t\right)\right]dt$$

$$= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} a_0 dt + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T_0}t\right)dt + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\left(b_k \sin\frac{2\pi k}{T_0}t\right)dt$$

$$= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} a_0 dt$$

$$= T_0 a_0$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)dx$$

次にフーリエ級数の式

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T_0}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T_0}t\right)$$

において、三角関数の直行性 $\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos(\frac{2\pi m}{T_0}t)\cos(\frac{2\pi n}{T_0}t)dt = \frac{T_0}{2}\delta_{m,n}$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sin(\frac{2\pi m}{T_0}t)\sin(\frac{2\pi n}{T_0}t)dt = \frac{T_0}{2}\delta_{m,n}$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos(\frac{2\pi m}{T_0}t)\sin(\frac{2\pi n}{T_0}t)dt = 0$$

に基づき、$k = \beta$ のときのフーリエ計数a_βを求める

$\cos\frac{2\pi\beta}{T_0}t$ をフーリエ級数の式の両辺右から掛け積分をとる

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi\beta}{T_0}dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T_0}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T_0}t\right)\right]\cos\frac{2\pi\beta}{T_0}t\,dt$$

積分と総和の入れ替えが可能と仮定して

$$= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} a_0 \cos\frac{2\pi\beta}{T_0}t\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} a_k \cos(\frac{2\pi k}{T_0}t)\cos(\frac{2\pi\beta}{T_0}t\,)dt + \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} b_k \sin(\frac{2\pi k}{T_0}t)\cos(\frac{2\pi\beta}{T_0}t\,)dt\right)$$

$$= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} a_\beta \cos(\frac{2\pi\beta}{T_0}t)\cos(\frac{2\pi\beta}{T_0}t\,)dt$$

$$= a_\beta\frac{T_0}{2}$$

$$\therefore \quad a_\beta = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi\beta}{T_0}dt$$

以上から、一般的にフーリエ計数は以下となる

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi k}{T_0}dt \quad (\quad k = 1,2,3 \ldots.)$$

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi k}{T_0}dt \quad (\quad k = 1,2,3 \ldots.)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)dx$$