フーリエ級数(指数関数)

○周期T_0の周期関数$f(t)$は、複素指数関数の無限和で表すことができ、これを$f(t)$の複素数型フーリエ級数展開という

○フーリエ級数展開の各係数は、$F_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\, e^{-i\Omega_0 kt} dt$で与えられて、フーリエ計数と呼ぶ

○足し合わされる複素指数関数は、元の関数f(t)の周期と、その整数分の 1 の周期（1/2 の周期、1/3 の周期、1/4 の周期…）を持つものであり、それ以外の周波数成分を持たない

フーリエ級数の三角関数展開式

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T_0}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T_0}t\right)$$

に、オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

より求めた

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

を代入する。　ただし、$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$とする。

$$\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \frac{e^{i\Omega_0 kt} + e^{-i\Omega_0 kt}}{2} + b_k \frac{e^{i\Omega_0 kt} - e^{-i\Omega_0 kt}}{2i}\right) \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{i\Omega_0 kt} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i\Omega_0 kt}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right) e^{i\Omega_0 kt} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\, e^{i\Omega_0 kt}
\end{aligned}$$

F_kがフーリエ計数となる。

次にフーリエ級数の式

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k\,e^{i\Omega_0 kt}$$

において、指数関数の直行性 $\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}e^{i\Omega_0 mt}\,e^{-i\Omega_0 nt}dt=T_0\delta_{m,n}$

より、$e^{-i\Omega_0\beta t}$ をフーリエ級数展開式の両辺の右から掛け、積分をとることで$k=\beta$のときのフーリエ計数F_βを求める

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}f(t)\,e^{-i\Omega_0\beta t}dt=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k\,e^{i\Omega_0 kt}\right)e^{-i\Omega_0\beta t}dt$$

$$=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}F_\beta e^{i\Omega_0\beta t}\,e^{-i\Omega_0\beta t}dt$$

$$=F_\beta T_0$$

$$\therefore\quad F_\beta=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}f(t)\,e^{-i\Omega_0\beta t}dt$$

以上から、一般的にk番目のフーリエ計数は以下となる

$$F_k=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}f(t)\,e^{-i\Omega_0 kt}dt\quad(-\infty\sim k\sim\infty)$$