# フーリエ変換とフーリエ逆変換

〇連続時間$-\infty < t < \infty$で定義された関数$f(t)$に対し、$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\Omega t} dt$

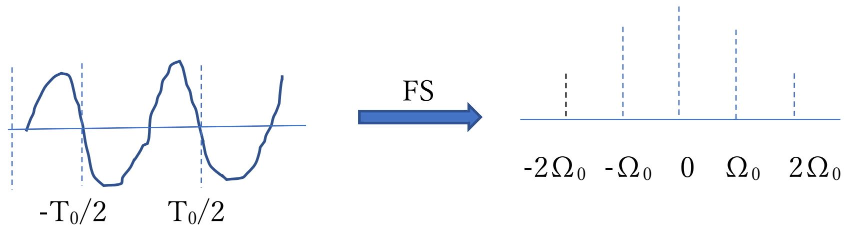
で計算される$F(\Omega)$を、$f(t)$の**フーリエ変換**と呼ぶ。

〇$F(\Omega)$から元$f(t)$を復元する式、$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t}\, d\Omega$ を**フーリエ逆変換**と呼ぶ。

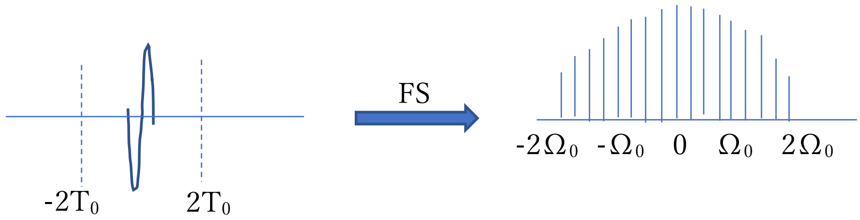
〇$\Omega$は角周波数を表す連続変数を、$F(\Omega)$は$f(t)$に含まれる角周波数$\Omega$の振動成分の量(振幅・位相)を表す

次にフーリエ級数展開を周期関数以外に適用するには

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\, e^{i\Omega_0 kt}$$




波形を変えずに周期だけを大きくする。例えば周期を 4$T_0$とすると




展開後の離散周波数のとぼとび感覚が小さくなり、周期を無限大（$\Omega_0$を無限小）にすることでさらに離散周波数は連続周波数のようになっていく。

但しこの間隔がいくら狭くなっても連続にはならない。そこで以下の式変形を行う。

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\, e^{i\Omega_0 kt}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_0 \frac{F_k e^{i\Omega_0 kt}}{\Omega_0}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\Omega_0 \frac{F_k e^{i\Omega_0 kt}}{\Omega_0}$$

よって

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\Omega_0 \frac{F_k e^{i\Omega_0 kt}}{\Omega_0}$$

次に　$\Omega[k] = \Omega_0 k$、$F(\Omega[k]) = 2\pi F_k/\Omega_0$とおき代入する。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\Omega_0 \frac{F_k e^{i\Omega[k]t}}{\Omega_0}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_0 F(\Omega[k]) e^{i\Omega[k]t}$$

更に$\Delta\Omega = \Omega_0$ とし

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\Omega[k]) e^{i\Omega[k]t}\Delta\Omega$$

$T_0 \to \infty$　にすると、　$\Omega[k]$は実数$\Omega$に連続化され、$\Delta\Omega$は無限小で$d\Omega$となり

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t}\, d\Omega$$

となり、これをフーリエ逆変換という。

一方、フーリエ計数の式に$\Omega[k] = \Omega_0 k$を代入し

$$F_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\, e^{-i\Omega_0 kt} dt \quad = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\, e^{-i\Omega[k]t} dt$$

この$F_k$を、$F(\Omega[k]) = 2\pi F_k/\Omega_0$に代入すると

$$F(\Omega[k]) = \frac{2\pi}{T_0\Omega_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\, e^{-i\Omega[k]t} dt$$

$$= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\, e^{-i\Omega[k]t} dt$$

同様に$T_0 \to \infty$とすると

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\Omega t} dt$$

となり、これをフーリエ変換という。