離散時間フーリエ変換と離散時間フーリエ逆変換

〇離散時間jで定義された関数$f[j]$に対し、$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f[j]\, e^{-i\omega n} dt$

で計算される$F(\omega)$を、$f[j]$の**離散時間フーリエ変換**と呼ぶ。

〇$F(\omega)$から元$f[j]$を復元する式、$f[j]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)e^{i\omega n}\, d\omega$ を**離散時間フーリエ逆変換**と呼ぶ。

〇ωは正規化角周波数を表す連続変数を、$F(\omega)$は$f[j]$に含まれる正規化角周波数ωの振動成分の量(振幅・位相)を表す

〇$F(\omega)$は周期 2π で周期的であり、通常$-\pi<\omega<\pi$ の範囲のみを考える。

t を離散時間にすると

$$f(t)=\begin{cases} f[j], & t=j \\ 0, & t\neq j \end{cases}$$

$$F(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\Omega t} dt$$

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[j]\, e^{-i\omega n}$$ ・・・・離散時間フーリエ変換

または

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[j]\,\delta(t-j)$$

から、これをフーリエ変換の式に代入すると

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} f[j]\,\delta(t-j)\}\, e^{-i\omega t} dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[j]\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-j)\, e^{-i\omega t} dt$$

よって

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[j]\, e^{-i\omega j}$$ ・・・・離散時間フーリエ変換

一方、フーリエ逆変換で時間を離散時間にすると($t\rightarrow n$)、$F(\omega)$は周期的となり

$$f[j]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)e^{i\omega j}\, d\omega$$ ・・・・離散時間フーリエ逆変換

となる。