

離散時間フーリエ変換と離散時間フーリエ逆変換

○離散時間 j で定義された関数 $f[j]$ に対し、 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f[j] e^{-i\omega n} dt$

で計算される $F(\omega)$ を、 $f[j]$ の **離散時間フーリエ変換** と呼ぶ。

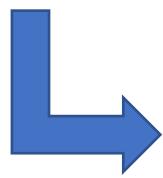
○ $F(\omega)$ から元 $f[j]$ を復元する式、 $f[j] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{i\omega n} d\omega$ を **離散時間フーリエ逆変換** と呼ぶ。

○ ω は正規化角周波数を表す連続変数を、 $F(\omega)$ は $f[j]$ に含まれる正規化角周波数 ω の振動成分の量(振幅・位相)を表す

○ $F(\omega)$ は周期 2π で周期的であり、通常 $-\pi < \omega < \pi$ の範囲のみを考える。

t を離散時間にすると

$$f(t) = \begin{cases} f[j], & t = j \\ 0, & t \neq j \end{cases}$$



$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt$$



$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[j] e^{-i\omega n} \quad \dots \text{離散時間フーリエ変換}$$

または

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[j] \delta(t - j)$$

から、これをフーリエ変換の式に代入すると

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} f[j] \delta(t - j) \right\} e^{-i\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[j] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - j) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

よって

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[j] e^{-i\omega j} \quad \dots \text{離散時間フーリエ変換}$$

一方、フーリエ逆変換で時間を離散時間にすると ($t \rightarrow n$)、 $F(\omega)$ は周期的となり

$$f[j] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{i\omega j} d\omega \quad \dots \text{離散時間フーリエ逆変換}$$

となる。