離散フーリエ変換と離散フーリエ逆変換

〇離散時間nで定義された周期Nの関数$f(n)$に対し、

$F[k]=\sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}$で計算される$F(k)$を、$f(n)$の**離散フーリエ変換**と呼ぶ。

〇$F[k]$も変数kに対し定義される周期Nの関数である。

〇$F[k]$から元の$f[n]$を復元する式、$f[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]\, e^{i\frac{2\pi kn}{N}}$　を**離散フーリエ逆変換**と呼ぶ。

〇kは周波数のインデックスを表す整数で$F(k)$は、は$f[n]$に含まれる正規化角周波数$\frac{2\pi k}{N}$の振動成分の量(振幅・位相)を表す

周波数関数を離散化して離散時間フーリエ逆変換の式に代入する

$$F(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\delta(\omega-\frac{2\pi k}{N})$$

($F(\omega)$はω $=2\pi k/N$の時のみ値を持つ)

$$f[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)e^{i\omega n}\,d\omega$$

(離散時間フーリエ逆変換)

$$f[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\delta(\omega-\frac{2\pi k}{N})e^{i\omega n}\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} c_k\, e^{i\frac{2\pi kn}{N}}$$

$c_k=F[k]\cdot 2\pi/N$とすると

$$f[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]\, e^{i\frac{2\pi kn}{N}}$$

・・・・・・・・・離散フーリエ逆変換

一方、離散時間フーリエ変換の式にω $=2\pi k/N$を代入すると、

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\, e^{-i\omega n}$$

(離散時間フーリエ変換)

$$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}$$

・・・・・・・・・離散フーリエ変換

正規化係数や指数の符号は単なる慣習的なものであり、それぞれの正規化係数を掛けると　1 / N になることと、指数の符号が異符号であるということだけが重要。正規化係数を両方とも$1/\sqrt{N}$にすると両方ともユニタリ変換となる。