量子離散フーリエ変換

○量子状態$|y\rangle$の基底$|j\rangle$から基底$|k\rangle$への変換により、

$$|y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} f[j]|j\rangle => \sum_{k=0}^{N-1} F[k]|k\rangle$$

基底$|j\rangle$は以下のように変換される。

$$|j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi kj}{N}}|k\rangle$$

$$F[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f[j]\, e^{i\frac{2\pi kj}{N}}$$ ・・・・・・・・・$f[j]$から$F[k]$への離散フーリエ変換

量子フーリエ変換は、離散フーリエ変換$f[j] \rightarrow F[k]$を用いて、

$\sum_{j=0}^{N-1} f[j]|j\rangle$ から $\sum_{k=0}^{N-1} F[k]|k\rangle$ への変換で定義される。

量子状態$|y\rangle$の基底ベクトルを$|j\rangle$から$|k\rangle$へ変換し、係数が$f[j]$から$F[k]$に変換されたとすると

$$|y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} f[j]\, |j\rangle => \sum_{k=0}^{N-1} F[k]\, |k\rangle$$

上式の変換後の式に離散フーリエ変換を適用し変換前の式と比較する。

$$\begin{aligned}
|y\rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} F[k]\, |k\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f[j]\, e^{i\frac{2\pi kj}{N}} |k\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} f[j] \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi kj}{N}} |k\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} f[j]\, |j\rangle
\end{aligned}$$

離散フーリエ変換により基底ベクトル$|j\rangle$は以下のように変換されていることがわかる。

$$|j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi kj}{N}} |k\rangle$$ ・・・・・量子フーリエ変換