離散フーリエ変換の量子回路

○量子フーリエ変換により、基底$|j\rangle$は以下のように変換される。

$$|j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi kj}{N}}|k\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_n}|1\rangle\right) \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_{n-1}j_n}|1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 j_2 \cdots j_n}|1\rangle\right)$$

$$j = 2^{n-1}j_1 + 2^{n-2}j_2 + \cdots\cdot + 2^0 j_n$$

$$\frac{j}{2} = j_1 j_2 \cdots\cdot j_{n-1} \,.\, j_n \qquad ①$$

$$\frac{j}{2^2} = j_1 j_2 \cdots\cdot j_{n-2} \,.\, j_{n-1} j_n \qquad ②$$

$$\cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot$$

$$\frac{j}{2^n} = 0.j_1 j_2 \cdots\cdot j_n \qquad ③$$

$$|j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{i2\pi kj}{2^n}}|k\rangle$$ ・・・・量子フーリエ変換

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\cdots\sum_{k_n=0}^{1} e^{i2\pi j(k_1\cdot 2^{n-1}+k_2\cdot 2^{n-2}+\cdots+k_n\cdot 2^0)/2^n}\left|k_1 k_2 \cdots\cdot k_n\right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\cdots\sum_{k_n=0}^{1} e^{i2\pi j(k_1/2+k_2/2^2+\cdots+k_n/2^n)}\left|k_1 k_2 \cdots\cdot k_n\right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\cdots\sum_{k_n=0}^{1} e^{i2\pi jk_1/2}|k_1\rangle \otimes e^{i2\pi jk_2/2^2}|k_2\rangle \otimes \cdots \otimes e^{i2\pi jk_n/2^n}|k_n\rangle$$

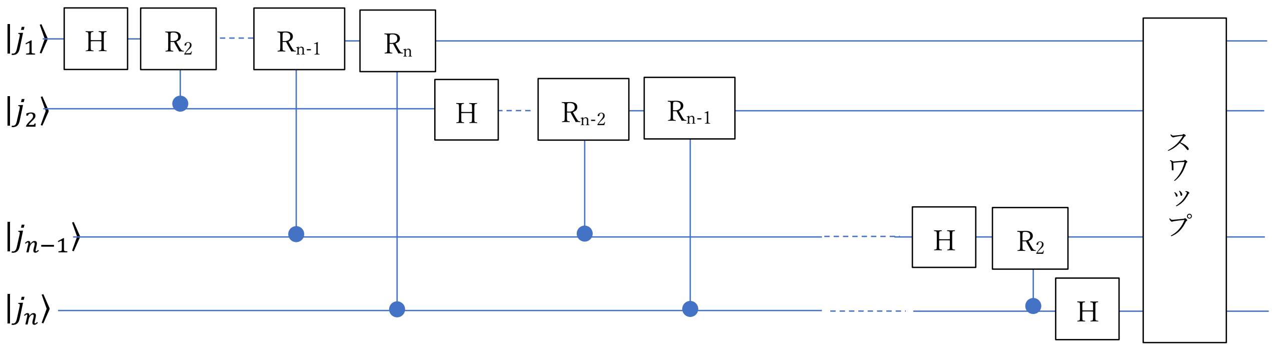
$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(|0\rangle + e^{i2\pi\frac{j}{2}}|1\rangle\right)^{①} \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi\frac{j}{2^2}}|1\rangle\right)^{②} \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi\frac{j}{2^n}}|1\rangle\right)^{③}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_n}|1\rangle\right) \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_{n-1}j_n}|1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 j_2 \cdots j_n}|1\rangle\right)$$

$e^{i2\pi} = 1$ であることを用いた。

$$e^{i2\pi\times j_1 j_2 \cdots j_{n-1}.j_n} = e^{i2\pi\times j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} \times e^{i2\pi\times 0.j_n} = e^{i2\pi\times 0.j_n}$$

一方、



上記で R_m は、制御ビットが$|0\rangle$のときは標的ビットをそのまま通し、制御ビットが$|1\rangle$のときは、以下の変換を施すゲート。

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow e^{i\frac{2\pi}{2^m}}|1\rangle$$

この量子回路に、$|j\rangle$（$|j_1\rangle \otimes |j_2\rangle \otimes \cdots\cdot |j_{n-1}\rangle \otimes |j_n\rangle$）を入力すると

スワップ後の出力は、

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(|0\rangle+e^{i2\pi 0.j_n}|1\rangle\right) \otimes \left(|0\rangle+e^{i2\pi 0.j_{n-1}j_n}|1\rangle\right) \otimes\cdots\otimes \left(|0\rangle+e^{i2\pi 0.j_1 j_2\cdots j_n}|1\rangle\right)$$

となることから、上記回路が量子離散フーリエ変換を実現することがわかる。