位相推定問題

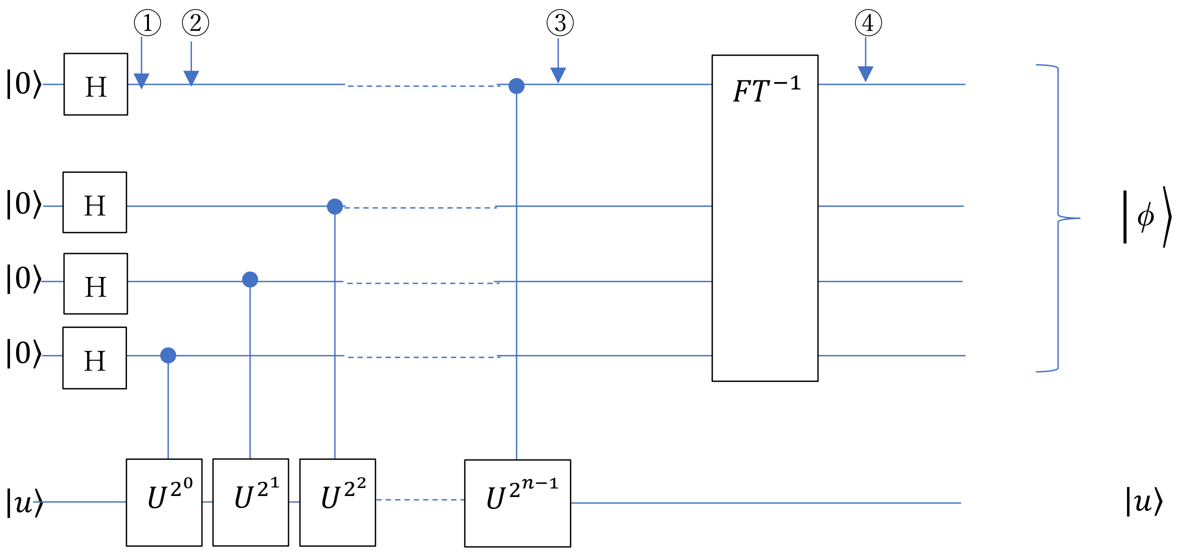
○U をユニタリ演算子として、

$$\mathrm{U}|u\rangle = e^{i2\pi\phi}|u\rangle$$

のとき、$\phi\,(0 \leqq \phi < 1)$を求める。

ここで、ϕ を 2 進数で表すと $0.\phi_1\phi_2\phi_3 \cdot\cdot\cdot \phi_n$ であるとする。

$\mathrm{U}|u\rangle = e^{i2\pi\phi}|u\rangle$



① アダマールゲート通過後

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}(|0\rangle+|1\rangle) \otimes (|0\rangle+|1\rangle) \otimes \cdot\cdot\cdot \otimes \big((|0\rangle+|1\rangle)\big) \otimes |u\rangle$$

② U^{2^0}ゲート通過後

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}(|0\rangle+|1\rangle) \otimes (|0\rangle+|1\rangle) \otimes \cdot\cdot\cdot \otimes \big((|0\rangle+|1\rangle)\big) \otimes \left(|0\rangle|u\rangle + |1\rangle e^{i2\pi 2^0 \phi}|u\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}(|0\rangle+|1\rangle) \otimes (|0\rangle+|1\rangle) \otimes \cdot\cdot\cdot \otimes \big((|0\rangle+|1\rangle)\big) \otimes \left(|0\rangle|u\rangle + e^{i2\pi 2^0 \phi}|1\rangle|u\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}(|0\rangle+|1\rangle) \otimes (|0\rangle+|1\rangle) \otimes \cdot\cdot\cdot \otimes \big((|0\rangle+|1\rangle)\big) \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi 2^0 \phi}|1\rangle\right) \otimes |u\rangle$$

③ 同様にしていくと$U^{2^{n-1}}$ゲート通過後には

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(|0\rangle+e^{i2\pi 2^{n-1}\phi}|1\rangle\right) \otimes \left(|0\rangle+e^{i2\pi 2^{n-2}\phi}|1\rangle\right) \otimes \cdot\cdot\cdot \otimes \left(|0\rangle+e^{i2\pi 2^0\phi}|1\rangle\right) \otimes |u\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(|0\rangle+e^{i2\pi 0.\phi_n}|1\rangle\right) \otimes \left(|0\rangle+e^{i2\pi 0.\phi_{n-1}\phi_n}|1\rangle\right) \otimes \cdot\cdot\cdot \otimes \left(|0\rangle+e^{i2\pi 0.\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}|1\rangle\right) \otimes |u\rangle$$

④ 同様にFT^{-1}ゲート通過後には

$$\left|\phi\right\rangle \otimes |u\rangle$$

となる。

以上を 10 進数表記で表すと

① アダマールゲート通過後

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle+|1\rangle)\otimes\cdot\cdot\cdot\otimes\left((|0\rangle+|1\rangle)\right)\otimes|u\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(\left|00\cdot\cdot00\right\rangle+\left|00\cdot\cdot01\right\rangle+\cdot\cdot+\left|11\cdot\cdot11\right\rangle\right)\otimes|u\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(|0\rangle+|1\rangle+\cdot\cdot+|2^n-1\rangle\right)\otimes|u\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{j=0}^{2^n-1}|k\rangle\otimes|u\rangle$$

② /③ 制御U^{2^k}ゲートを全体の状態が通ると

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{j=0}^{2^n-1}|k\rangle\otimes U^k|u\rangle$$

となり、上式は以下のように変換できる

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{j=0}^{2^n-1}|k\rangle\otimes U^k|u\rangle=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{j=0}^{2^n-1}|k\rangle\otimes e^{i2\pi k\,\phi}|u\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{j=0}^{2^n-1}e^{i2\pi k\Phi/2^n}\;|k\rangle\otimes|u\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{j=0}^{2^n-1}e^{i2\pi\Phi k/2^n}\;|k\rangle\otimes|u\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}e^{i2\pi\Phi k/N}\;|k\rangle\otimes|u\rangle$$

但し、$\phi=0.\phi_1\phi_2\phi_3\cdot\cdot\phi_n$、$\Phi=2^n\phi=\phi_1\phi_2\phi_3\cdot\cdot\cdot\phi_n$、$N=2^n$ を用いた。

④ よってFT^{-1}ゲート通過後には

$$\left|\phi\right\rangle\otimes|u\rangle$$

となる。