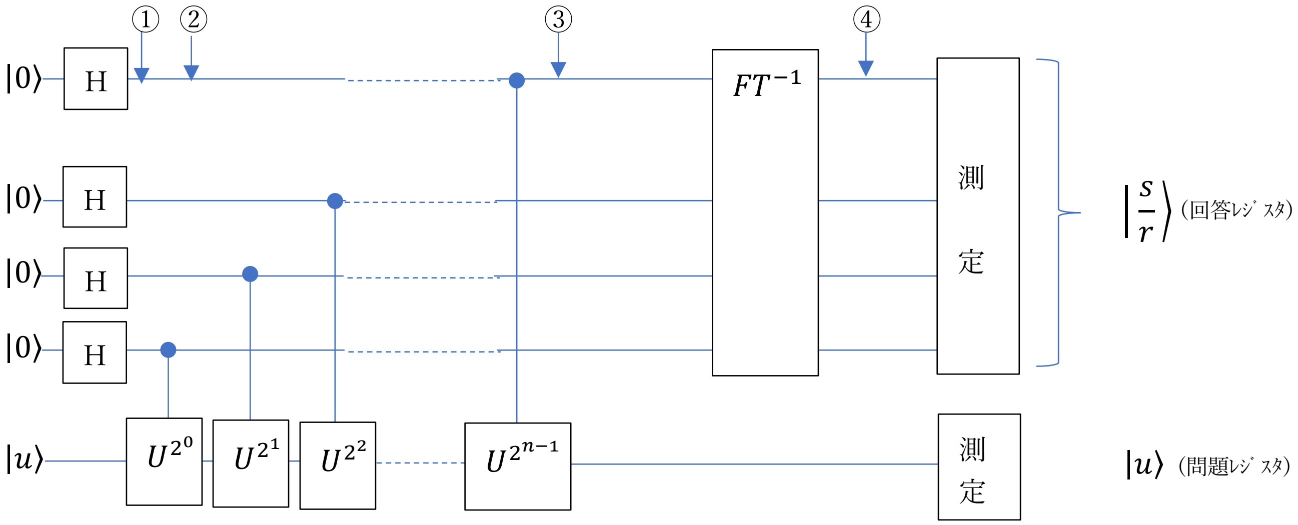
量子計算による位数計算

○位数を、位相推定問題から導くために必要な$|u_s\rangle$が不定のため、代わりにその重ね合わせである$|1\rangle$を入力とする。



$|u\rangle = |1\rangle$と置く。

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{s=0}^{r-1}|u_s\rangle = |1\rangle$$

② → ③ U^{2^k}ゲートを全体の状態が通ると

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1}|k\rangle \otimes U^k|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1}|k\rangle \otimes U^k|1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1}|k\rangle \otimes U^k \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{s=0}^{r-1}|u_s\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{s=0}^{r-1}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1}|k\rangle \otimes U^k|u_s\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{s=0}^{r-1}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1}|k\rangle \otimes e^{i2\pi k\frac{s}{r}}|u_s\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{s=0}^{r-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1}e^{i2\pi k\frac{s}{r}}|k\rangle\right) \otimes |u_s\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{s=0}^{r-1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}e^{i2\pi k\frac{\$}{r}/N}|k\rangle\right) \otimes |u_s\rangle$$

（ただし$\$=2^n s$ 、$N=2^n$とした）

この結果回答レジスターは、０からｒ－１までのｒ通りのｓを持つ状態

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi k\frac{\$}{r}/N}|k\rangle$$

の重ね合わせになっており、これらは$\left|\frac{s}{r}\right\rangle$のフーリエ変換結果である。

④ フーリエ逆変換により $\left|\frac{s}{r}\right\rangle$ が出力される